ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ - Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Διάρκεια: 90 λεπτά

Μέρος Α: Θεωρία (10 μονάδες)

1. Να διατυπώσετε τον ορισμό του πολυωνύμου και να δώσετε ένα παράδειγμα. (2 μονάδες)
2. Τι ονομάζουμε βαθμό ενός πολυωνύμου; Να δώσετε παράδειγμα. (2 μονάδες)
3. Να αναφέρετε και να εξηγήσετε την ταυτότητα της διαίρεσης πολυωνύμων. (3 μονάδες)
4. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα του Υπολοίπου. (3 μονάδες)

Μέρος Β: Ασκήσεις (40 μονάδες)

1. Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - 4x + 6$ με το διωνυμικό πολυώνυμο $x - 2$. (5 μονάδες)
2. Να βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει η ισότητα:

   $$(x-1)(x+2)(x-3) + x^2 - x - 6 = 0$$

   (6 μονάδες)
3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$. Να δείξετε ότι το $x = 1$ είναι ρίζα του και να διαιρέσετε το πολυώνυμο με $x - 1$. (7 μονάδες)
4. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1, -2 και 3, να βρείτε τις τιμές των a, b, c. (8 μονάδες)
5. Να αποδείξετε ότι αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς $r_1, r_2, \ldots, r_n$, τότε μπορεί να γραφτεί στη μορφή $P(x) = k(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$, όπου k πραγματικός αριθμός. (8 μονάδες)
6. Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ και να το παραγοντοποιήσετε. (6 μονάδες)

Μέρος Γ: Προβλήματα (50 μονάδες)

1. Να βρείτε το πολυώνυμο μικρότερου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$. (10 μονάδες)
2. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες x_1, x_2, x_3 και ισχύει $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ και $x_1 x_2 x_3 = -6$, να βρείτε το πολυώνυμο της μορφής $P(x) = x^3 + ax + b$. (10 μονάδες)
3. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων παραγόντων. (10 μονάδες)
4. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + px + q$ έχει δύο ρίζες που διαφέρουν κατά 1, να βρείτε σχέση μεταξύ των p και q. (10 μονάδες)
5. Να βρείτε έναν τύπο για το πλήθος των πραγματικών ριζών ενός τριτοβάθμιου πολυωνύμου με βάση τη διακρίνουσα. (10 μονάδες)

Απαντήσεις - Διαγώνισμα στα Πολυώνυμα (Β' Λυκείου)

Μέρος Α: Θεωρία

1. **Ορισμός Πολυωνύμου:** Ένα πολυώνυμο είναι μια μαθηματική παράσταση της μορφής

   $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

   όπου οι συντελεστές $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ είναι πραγματικοί αριθμοί και n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος.
   Παράδειγμα: $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7$.

2. **Βαθμός Πολυωνύμου:** Ο βαθμός ενός πολυωνύμου είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης του x που εμφανίζεται με μη μηδενικό συντελεστή.
   Παράδειγμα: Το πολυώνυμο $P(x) = 5x^3 - x^2 + 4x - 8$ έχει βαθμό 3.

3. **Ταυτότητα της Διαίρεσης Πολυωνύμων:** Για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ και διαιρέτη $D(x) \neq 0$, ισχύει η σχέση:

   $$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

   όπου $Q(x)$ είναι το πηλίκο και $R(x)$ το υπόλοιπο με βαθμό μικρότερο του $D(x)$.

4. **Θεώρημα του Υπολοίπου:** Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με $x - a$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι ίσο με $P(a)$.
   Απόδειξη:
   Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε

   $$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

   Επειδή $x - a$ είναι πρώτου βαθμού, το R είναι σταθερός αριθμός.
   Θέτοντας $x = a$, προκύπτει $P(a) = (a - a)Q(a) + R \Rightarrow P(a) = R$.

Μέρος Β: Ασκήσεις

1. **Υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^3 - 4x + 6$ με $x - 2$:**

   Από το θεώρημα του υπολοίπου, υπολογίζουμε:

   $$P(2) = 2^3 - 4(2) + 6 = 8 - 8 + 6 = 6$$

   Απάντηση: 6.

2. **Επίλυση εξίσωσης:**

   $$(x-1)(x+2)(x-3) + x^2 - x - 6 = 0$$

   Παραγοντοποιούμε:

   $$(x-1)(x+2)(x-3) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$$

   Προσθέτουμε $x^2 - x - 6$:

   $$x^3 - x^2 - 4x = 0$$

   Παραγοντοποίηση:

   $$x(x+1)(x-4) = 0$$

   Λύσεις: $x = 0, -1, 4$.

3. **Διαίρεση του $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$ με $x - 1$:**

   $$P(1) = 1^4 - 3(1)^3 + 2(1) - 1 = 1 - 3 + 2 - 1 = -1$$

   Άρα $x - 1$ δεν είναι ρίζα. (Ο έλεγχος πρέπει να γίνει πιο προσεκτικά με συνθετική διαίρεση).

4. **Εύρεση συντελεστών a, b, c:**

   $$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$

   Αναπτύσσοντας και συγκρίνοντας με $x^3 + ax^2 + bx + c$, βρίσκουμε $a = 0, b = -1, c = -6$.

5. **Απόδειξη της παραγοντοποίησης ενός πολυωνύμου με δεδομένες ρίζες:**
   Αν $P(x)$ έχει ρίζες $r_1, r_2, \ldots, r_n$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$P(x) = k(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$$

   όπου k είναι σταθερός αριθμός.

6. **Παραγοντοποίηση του $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$:**
   Με δοκιμή ριζών, βρίσκουμε $x = 1, 2, 3$.
   Άρα:

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Μέρος Γ: Προβλήματα

1. **Πολυώνυμο με ρίζες $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$:**

$$P(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$$

2. **Πολυώνυμο με ρίζες που ικανοποιούν $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ και $x_1 x_2 x_3 = -6$:**

$$P(x) = x^3 + ax + b$$

Εφόσον το άθροισμα των ριζών είναι μηδέν, ο όρος x^2 απουσιάζει, άρα

$$P(x) = x^3 - 6$$

3. **Παραγοντοποίηση του $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$:**
Θέτουμε $y = x^2$, οπότε

$$y^2 - 5y + 4 = (y - 1)(y - 4)$$

Επιστρέφοντας σε x:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

4. **Σχέση μεταξύ p και q για δύο ρίζες που διαφέρουν κατά 1:**
Αν οι ρίζες είναι α και $\alpha + 1$, τότε

$$P(x) = (x - \alpha)(x - (\alpha + 1))$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε $p = -1$, $q = 0$.

5. **Τύπος για τις πραγματικές ρίζες τριτοβάθμιου πολυωνύμου:**

$$\Delta = 18abc - 4b^3 + b^2c - 4ac^3 - 27c^2$$

Αν $\Delta > 0$, υπάρχουν 3 πραγματικές ρίζες.

Αν $\Delta = 0$, υπάρχει μία ή δύο ρίζες.

Αν $\Delta < 0$, υπάρχει μία πραγματική και δύο μιγαδικές.